Grado M+I
Curso 2015-2016

Cálculo I

Matemática Aplicada
ETSIInf-UPM

Lista de demostraciones para el segundo parcial

Tema 2. Funciones. Límites y continuidad

1. **Definición** de
$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

2. **Demostración del "Criterio del Sandwich".**

   Sean $f(x), g(x), h(x)$ tales que existe $r > 0$ de forma que $\forall x \in (a-r, a+r)\setminus\{a\}$ se tiene que:
$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$
   Si $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ entonces
$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

3. **Demostración de la "Propiedad de conservación del signo de las funciones continuas".**

   Sea f una función continua en a. Si $f(a) > 0$ entonces existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in (a-r, a+r)$.

4. **Demostración del "Teorema de Bolzano".**

   Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$. Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

5. **Demostración del "Teorema de los valores intermedios de Darboux".**

   Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$. Si $f(a) < d < f(b)$, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

6. **Demostración del "Teorema de acotación".**

   Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f continua en $[a, b]$ (intervalo cerrado y acotado), entonces f es acotada en $[a, b]$.

7. **Demostración del "Teorema de Weierstrass".**

   Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f continua en $[a, b]$ (intervalo cerrado y acotado), entonces f alcanza su máximo y su mínimo absoluto en $[a, b]$.

Tema 3. Cálculo diferencial

1. **Demostración del siguiente resultado:** Sea f una función derivable en el punto a. Entonces f es continua en a.

2. **Demostración de la "Condición necesaria de extremo relativo".**

   Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $c \in (a, b)$ con f derivable en c. Si f tiene un extremo relativo en c, entonces $f'(c) = 0$.

3. **Demostración del "Teorema de Rolle".**

   Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y además se cumple que $f(a) = f(b)$, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

4. **Demostración del "Teorema del valor medio (de Lagrange)".**

   Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f continua en $[a, b]$, f derivable en (a, b), entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)\ (b - a).$$

5. **Demostración del "Teorema de Taylor".**

   Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto, f derivable $n+1$ veces en A, y sean $a, x \in A$. Entonces, existe un punto c del intervalo que une x con a tal que:

$$f(x) = P_{n,a}f(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Tema 4. Cálculo integral

6. **Definición de "suma superior e inferior de Riemann" y de "función Riemann integrable en $[a, b]$".**

7. **Enunciado del "Teorema Fundamental del Cálculo".**

   Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si $x \in [a, b]$ definimos

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

   (a) Si f es Riemann integrable en $[a, b]$ entonces F es continua en $[a, b]$.

   (b) Si f es continua en $[a, b]$ entonces F es derivable en (a, b).